

7.4 Décomposition en valeurs singulières

Dans le cas plus général des matrices rectangulaires $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, il n'existe pas de décomposition $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale. Mais on peut factoriser A en

$$A = U\Sigma V^T$$

où Σ est *diagonale par blocs* et U et V sont orthogonales.

Valeurs singulières

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. La valeur absolue des valeurs propres de A mesure la façon dont A étire ou comprime les vecteurs propres :

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice rectangulaire. On sait que $A^T A$ est symétrique, donc diagonalisable en base orthogonale. Par conséquent, il existe une base $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ orthonormale de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de $A^T A$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres correspondantes. Il se peut qu'on ait $\lambda_i = \lambda_j$ pour certaines valeurs de i et de j .

On a

Définition 72 (valeurs singulières).

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Les *valeurs singulières* de A sont les racines des valeurs propres de $A^T A$. On les note

Remarques

Exemple

Théorème 76. Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice et $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de $A^T A$. Soient $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ les valeurs propres correspondantes. Supposons que A possède r valeurs singulières non nulles. Alors

Remarque

Décomposition en valeurs singulières (SVD)

Théorème 77. *Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice de rang r . Il existe une matrice $\Sigma \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ diagonale par blocs, une matrice $U \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ orthogonale et $V \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ orthogonale telles que*

$$A = U\Sigma V^T.$$

De plus, Σ est de la forme

Remarque

Preuve

Exemple

